Lezione 29

Identità di Bianchi: (M, g) pR $\dashrightarrow R$ Riemann

$$\nabla_a R_{ijk}{}^{l} + \nabla_i R_{jak}{}^{l} + \nabla_j R_{aik}{}^{l} = 0$$

Contraendosi si ottiene $\boxed{\nabla_a R^a{}_i = \frac{1}{2} \nabla_i R}$

$$R^a{}_i = R_{ji}\, g^{ja}$$

Def: TENSORE DI EINSTEIN:

$$\boxed{G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} R\, g_{ij}}$$

campo tensoriale simmetrico $(0,2)$

Oss: $\boxed{\nabla_i G^i{}_j = 0}$ conseguenza di Bianchi

(M,g) pR $\dashrightarrow$ G_{ij} ha divergenza nulla

Equazione di campo di Einstein:

costante cosmologica

costante grav. di Newton

$$\boxed{G_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}} + \Omega\, g_{ij}$$

$\nabla g_{ij} = 0$

tensore di Einstein

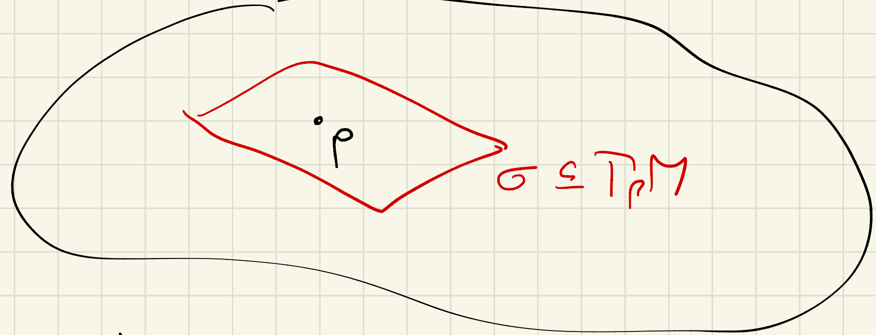
tensore di energia impulso

(M,g) M 4-varietà g Lorentziana

$$\nabla_i T^i{}_j = 0 \quad (\operatorname{div} T = 0)$$

Curvatura sezionale

$K(\sigma) \in \mathbb{R}$



Se $\mathrm{Isom}(M)$ agisce transitivamente sui frame di M, allora K è COSTANTE

Capita per	$\mathbb{R}^{p,q}$	$S^{p,q}$	$H^{p,q}$	$\Rightarrow$ K costante
$K=$	0	1	-1	(conti da fare)

<u>Teo</u>: Se M Riem. è sempl. connessa, completa, e con $K = 1, 0, -1$ costante, allora M è isometrica a S^n, $\mathbb{R}^n$, H^n

CAMPI DI JACOBI

(M, ∇) $\qquad f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times I \to M$ (con $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $t \in I$) $\qquad \gamma_s = f(s, \cdot)$

X, Y, Z campi su f

X su f è

$X : (-\varepsilon, \varepsilon) \times I \to TM$

t.c. $X(s,t) \in T_{\gamma_s(t)} M$

$\Rightarrow R(X, Y, Z)$ nuovo campo su f

$$R(X, Y, Z)(s,t) = R\big(X(s,t), Y(s,t), Z(s,t)\big) \in T_{\gamma_s(t)} M$$

Prop: X campo su f

$$D_s D_t X - D_t D_s X = R(S, T, X)$$

$S, T = df_\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$

$S = df_\cdot\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)$

$D_s T = D_t S$

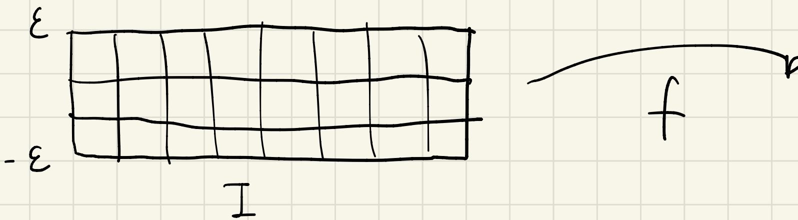
(torsione nulla)

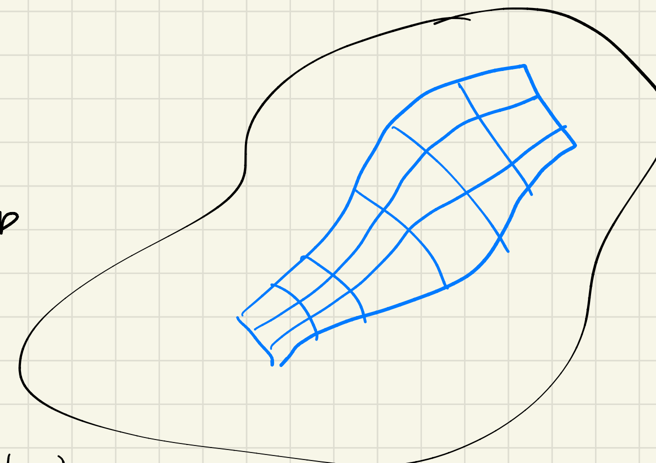
dim: Se f embedding:

I campi possono essere interpretati come campi su $f\big((-\varepsilon, \varepsilon) \times I\big)$

$$R(S,T,X) = \nabla_S \nabla_T X - \nabla_T \nabla_S X - \cancel{\nabla_{[S,T]} X}$$

$$[S,T]=0$$



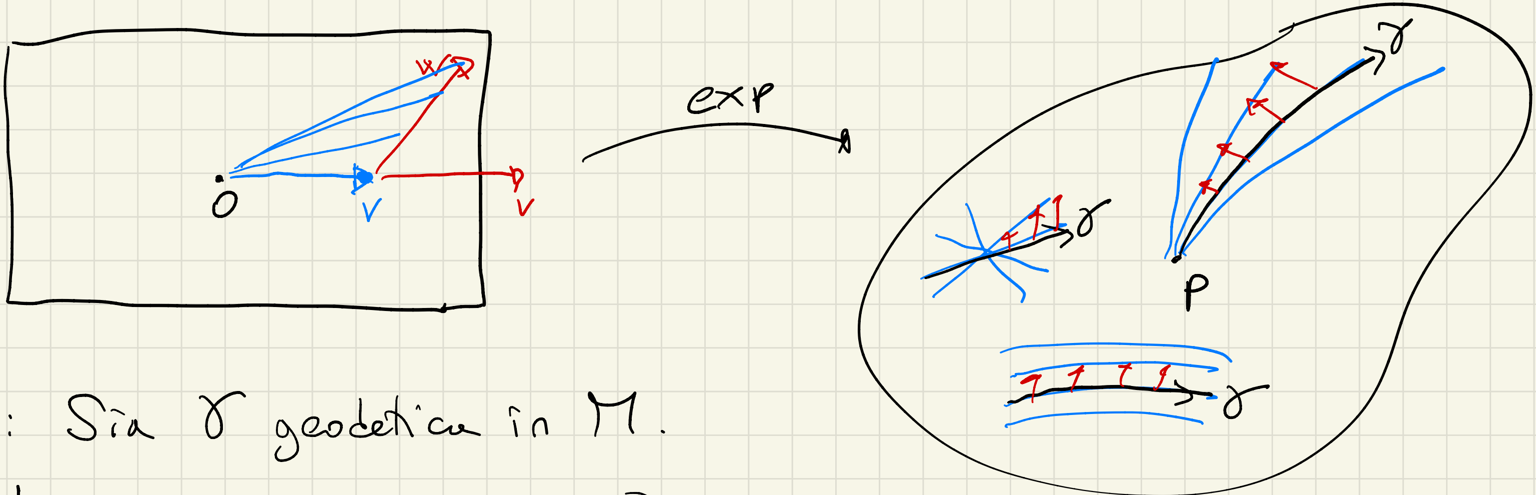


(Se f non è embedding si fanno i conti in carte)

$\square$

Def: Una FAMIGLIA DI GEODETICHE è una

$f: (-\varepsilon, \varepsilon) \times I \to M$ t.c. γ_s è geod. $\forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$



Def: Sia γ geodetica in M.

Un CAMPO DI JACOBI è

un campo $J = S$ ottenuto da una famiglia di geodetiche

γ_s con $\gamma_0 = \gamma$.

Prop: Un campo di Jacobi J su una geodetica γ è

soluzione di questo sist. di eq. differenziali:

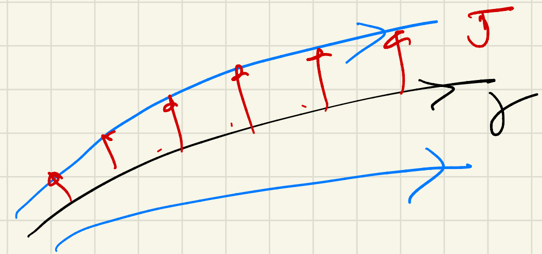
$$\boxed{D_t D_t J + R(J, \gamma', \gamma') = 0}$$ eq. di Jacobi

dim:

$$D_s D_t X - D_t D_s X = R(S,T,X)$$

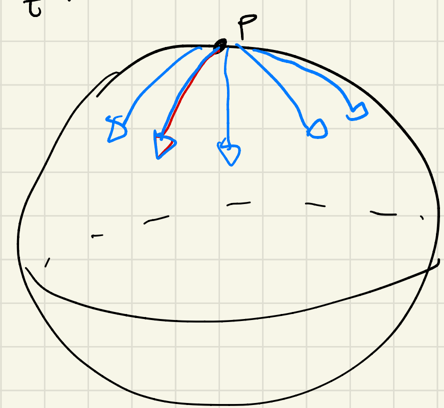
$X = T$

$$D_s \underbrace{D_t T}_{= 0} - \underbrace{D_t D_s T}_{= -D_t D_t S} = R(S,T,T)$$



$S = J$

$D_t T = 0$

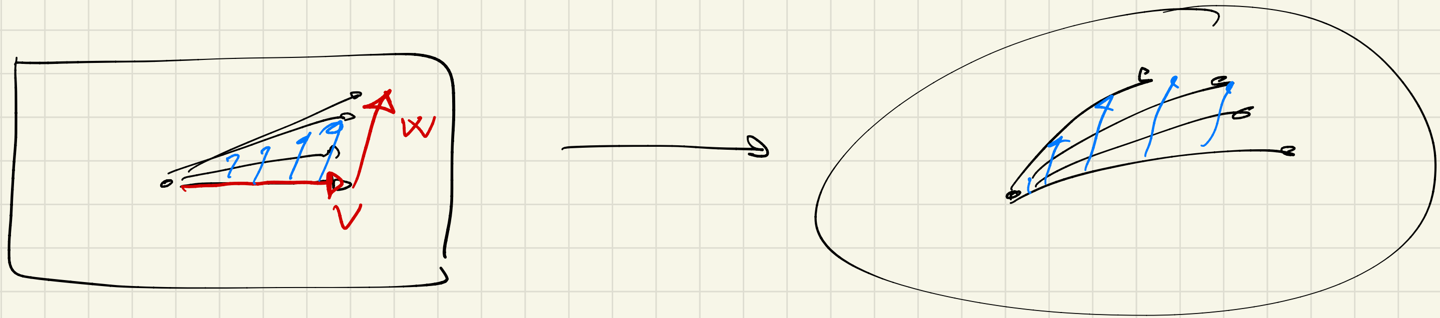


Prop: Ogni soluzione dell'eq di Jacobi è un campo di Jacobi

dim (linea): soluz. J è determinata da $J(p)$ e $D_t J(p)$

Costruiamo famiglie di geodetiche che realizzano tutti i possibili $J(p)$ e $D_t J(p)$

Oss: Se $\gamma_s(t) = \exp(t(v+sw))$



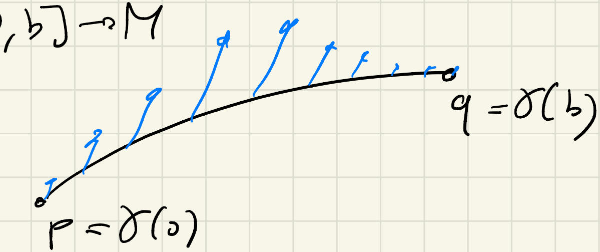
Facendo i conti, in questo caso

$$J(0)=0, \qquad D_t J(0) = w$$

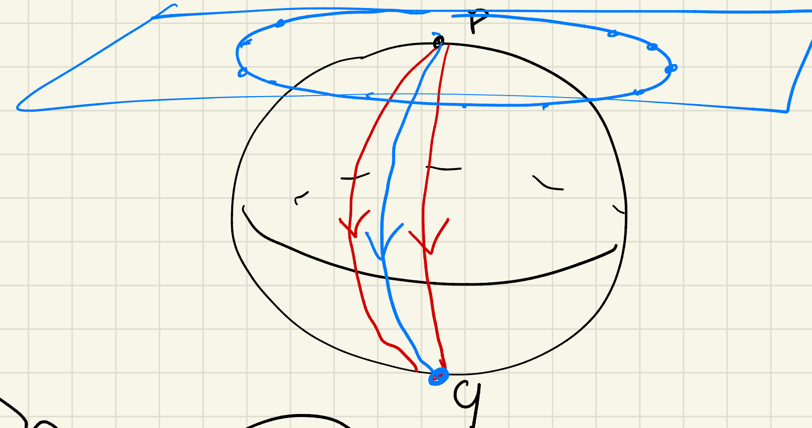
Def: γ geodetica da p a q $\quad \gamma:[0,b]\to M$

p e q sono CONIUGATI se $\exists$ campo di Jacobi J su γ con

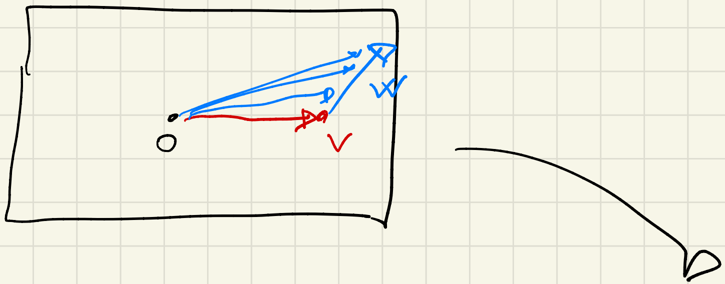
$$J(0)=0 \qquad J(b)=0$$

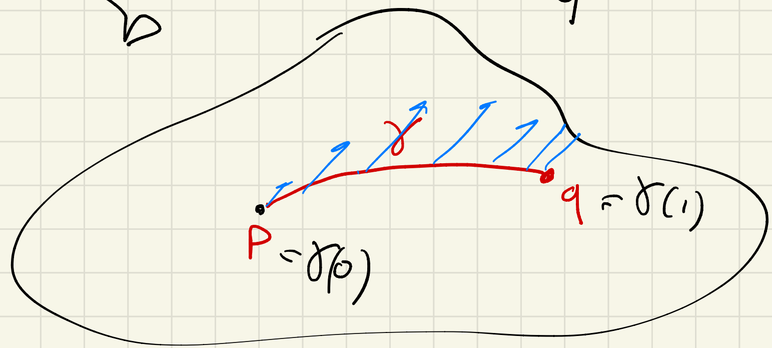


Es: Punti antipodali in S^2



Prop:





$\gamma(t) = \exp_p(tv)$

$\gamma : [0,1] \to M$

p e q sono coniugati lungo γ

$\iff$ v è singolare per $\exp_p : V_p \to M$

(cioè $(d\exp_p)_v$ non è iniettivo)

dim: Il campo di Jacobi J con $J(0) = 0$, $D_t J(0) = w$

è ottenuto dalla famiglia $\gamma_s(t) = \exp_p(t(v+sw))$

Teo (Cartan - Hadamard)

(M,g) Riemanniana $\quad K \leq 0 \quad (K(\sigma) \leq 0 \ \forall p \in M, \ \forall \sigma \in T_pM)$

completa connessa $\Rightarrow \exp_p : T_pM \to M$ $\forall p \in M$ è un RIVESTIMENTO

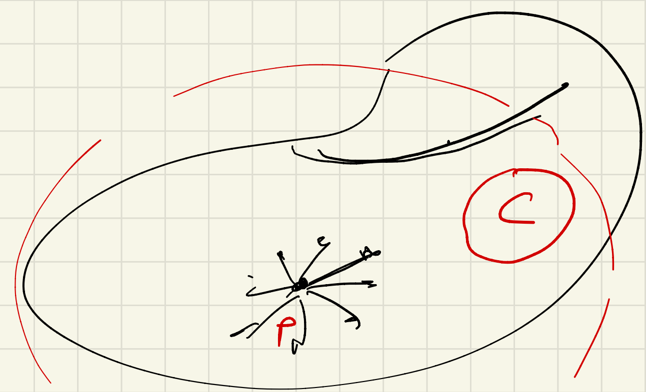
Prop: M Riem. conn. $\exists p \in M$ t.c. $\exp_p : T_pM \to M$

$\Rightarrow M$ completa

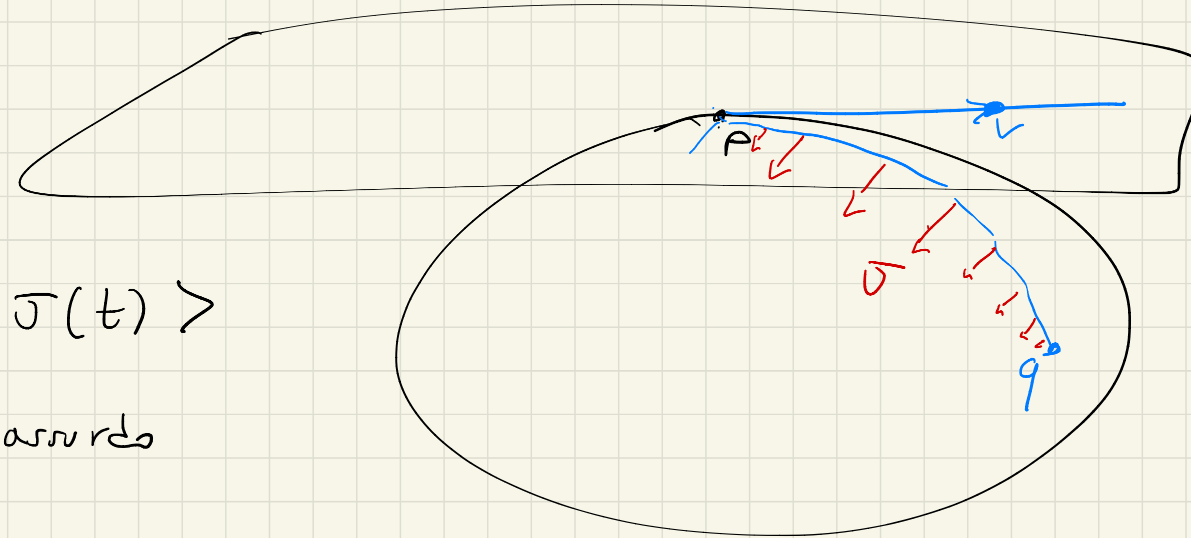
dim: a) ogni q è collegato a p con geodetica

b) mostriamo che $K \subseteq M$

cpt $\Leftarrow$ chiuso & lim.
$\Rightarrow$
$\Leftarrow$



dim: $K \leq 0 \Rightarrow$ non esistono punti coniugati



$$f(t) = \langle J(t), J(t) \rangle$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(1) = 0 \end{array}\right\} \text{per assurdo}$$

$$f'(t) = 2 \langle D_t J, J \rangle$$

$$f''(t) = 2\left(\langle D_t D_t J, J \rangle + \langle D_t J, D_t J \rangle \right)$$

$$= 2 \left(\langle -R(J, \gamma', \gamma'), J \rangle + \| D_t J \|^2 \right)$$

$$D_t D_t J + \mathbf{R}(J, \gamma', \gamma') = 0$$

$R_{ijk}{}^{\ell}$ $\qquad R(u, v, w) \in T_pM$

$R_{ijk\ell}$ $\qquad R(u, v, w, z) \in \mathbb{R}$

$$\overset{\shortparallel}{g(R(u, v, w), z)} = \langle R(u, v, w), z \rangle$$

$$= 2\left(-R(J, \gamma', \gamma', J) + \|D_t J\|^2\right) \geq 0$$

> 0 se $J \neq 0$

$K(\sigma) \leq 0 \implies R(u, v, v, u) \leq 0$ $\qquad u, v$ gen σ

$$\overset{\shortparallel}{\frac{R(u, v, v, u)}{(Q(u, v) > 0)}}$$

$\Rightarrow \exp_p : T_pM \to M$ diffeo loc. $\overset{?}{\Rightarrow}$ rivestimento

<u>Ex</u>: $f : A \to B$ isom. loc. A completa $\Rightarrow f$ rivestimento

Doto T_pM della metrica $g^* = (\exp_p)^*(g)$

Ora $\exp_p$ è isom. loc.

Noto che g^* è completa:

Le geodetiche che escono da $0 \in T_pM$

sono quelle euclidee $\gamma(t) = tv$

$\Rightarrow$ esistono $\forall t$ $\Rightarrow$ (Prop) (T_pM, g^*) è completo

__Cor__: Se $\underset{\text{completa}}{M^n}$ ha $K \leq 0$, allora $\tilde{M} \underset{\text{diffeo}}{\cong} \mathbb{R}^n$

__Cor__: Se $\underset{\text{completa}}{M}$ ha $K \leq 0$ e $\pi_1(M) = \{e\}$ $\Rightarrow$ $M \underset{\text{diffeo}}{\cong} \mathbb{R}^n$